LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Fogelberg

APRILPROBLEMET - 2001

Problem: En lärare skrev alla heltalen från 1 upp till ett visst tal på svarta-tavlan. Därefter poängterade han för klassen att medelvärdet av alla talen han skrivit upp så när som på ett av dem blev exakt 45/4. Klassen som såg alla talen lyckades klura ut vilket det var som inte var med i beräkningen.
Kan du ?

Lösning: Vi skriver summan av alla talen från 1 upp till n:

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=s$. Denna summa s kan beräknas genom att skriva den en gång till och då börja med n och gå nedåt till 1, så här $n+(n-1)+\cdots+2+1=s$.
Adderar man sedan de två första termerna i de båda uttrycken för s och sedan de två på andra plats osv får vi n st termer som alla blir $n+1$, nämligen:

$1\ +\ n,\ 2\ +(n-1),\ \cdots\ ,\ (n-1)\ +2,\ n\ +\ 1$. Dvs $2s=n(n+1)$ eller $s=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Kalla talet som inte är med i medelvärdet för k, där $1\le k\le n$.

Medelvärdet av dessa $n-1$ positiva heltal där k är avlägsnat ges av: $\dfrac{s-k}{n-1}$ och eftersom

$s=\dfrac{n(n+1)}{2}$ erhåller vi ekvationen: $\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}-k}{n-1}=\dfrac{45}{4}$ eller $4\dfrac{n(n+1)}{2}-4k=(n-1)45 \iff$

$2n(n+1)-4k=(n-1)45$.

Observera att Vänstra ledet av ekvationen är ett jämnt tal och inte nog med det. Talen n och $n+1$ är två på varandra följande tal så ett av dem måste vara jämnt och således är termen $2n(n+1)$ delbar med 4 och eftersom termen $4k$ uppenbarligen också är det så gäller att Vänstra ledet är delbart med 4. Men i Högra ledet är talet 45 udda och således måste faktorn $(n-1)$ vara delbar med 4. Dvs $n-1=4m$ eller $n=4m+1$ och $n+1=4m+2$ (obs att $m\ge 1$). Detta insättes i ekvationen och vi får:

$2(4m+1)(4m+2)-4k=4m\cdot 45 \iff (4m+1)(2m+1)-k=45m$

Således har problemtexten givit oss följande ekvation,

(**E**): $(4m+1)(2m+1)-k=45m$, där villkoret att $1\le k\le n$, $n=4m+1$ ger oss två olikheter:

(1): $(4m+1)(2m+1)-1\ge 45m$ och (2): $(4m+1)(2m+1)-(4m+1)\le 45m$ varav följer

(1)': $8m^2+6m+1-1\ge 45m \iff 8m^2-39m\ge 0 \iff m(8m-39)\ge 0 \Rightarrow m\ge \dfrac{39}{8} \Rightarrow m\ge 5$ och

(2)': $8m^2+6m+1-(4m+1)\le 45m \iff 8m^2-43m\le 0 \iff m(8m-43)\le 0 \Rightarrow m\le \dfrac{43}{8} \Rightarrow m\le 5$.

Det följer att $m=5$ och insatt i (**E**) fås $k=6$. Notera också att $n=4m+1=21$.

Läraren skrev alltså upp talen 1 till 21 på tavlan och beräknade medelvärdet av 20 av dessa tal där han inte tog med **talet 6**. Vi har även visat att detta är den enda lösningen på problemet.

Kontroll: $\dfrac{1+2+3+\cdots+20+21-6}{20}=\dfrac{\frac{21\cdot 22}{2}-6}{20}=\dfrac{21\cdot 11-6}{20}=\dfrac{231-6}{20}=\dfrac{225}{20}=\dfrac{45}{4}$